

4.6.6 Složený sériový RLC obvod střídavého proudu

Předpoklady: 4212, 4605

Pomůcky: cívka 600 závitů, rovné jádro, U jádro, žárovka 6 V 300 mA, dva multimetry, kondenzátor $50\ \mu\text{F}$ (skutečná hodnota našeho konkrétního kondenzátoru, který je u veden ve výpočtech je $46\ \mu\text{F}$), zdroj střídavého napětí.

Minulá hodina: Ohmický odpor i induktance omezují proud ve střídavém obvodu, nemůžeme je však sčítat normálně, ale musíme použít Pythagorovu větu (zřejmě proto, že obě veličiny způsobují rozdílný posun proudu a napětí v obvodu).

⇒ Musíme vymyslet nějaký konzistentní postup, jak podobné příklady počítat, i v případě, že do obvodu přidáme kondenzátor.

Co musí náš postup splnit?

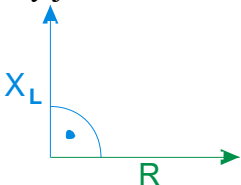
- U součástek není důležitý pouze jejich „odpor“, ale i fázový posun, který způsobují ⇒ musíme je popisovat pomocí obou čísel.
- Pro sériový RL obvod musíme dostat stejné výsledky jako v minulé hodině.

Jak popsat součástky a zachytit velikost (odpor, kapacitance, induktance) a fázový posun?

Nápad: Dvě čísla charakterizují vektory ⇒ budeme zobrazovat všechny druhy impedancí (odpor, kapacitance, induktance) pomocí vektorů jejichž:

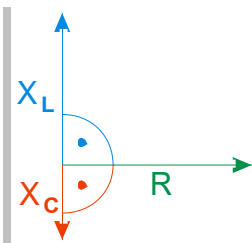
- velikost odpovídá velikosti impedance,
- úhel, který svírají například s osou x , odpovídá fázovému posunu, který způsobují.

My jsme tento obrázek použili již v minulé hodině.



Modře je nakreslen vektor induktance, zeleně vektor odporu.

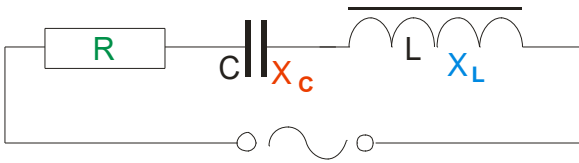
Př. 1: Dokresli do obrázku vektor kapacitance, jejíž velikost je poloviční s porovnání s velikostí induktance.



Vektor kapacitance má poloviční délku a směřuje opačně než vektor induktance (s vektorem odporu svírá -90° místo 90° , které s ním svírá vektor induktance).

Stejně jako u jednotlivých druhů impedancí můžeme vektory používat i pro napětí a proudy. Platí pro ně to samé, co platí pro vektory impedancí.

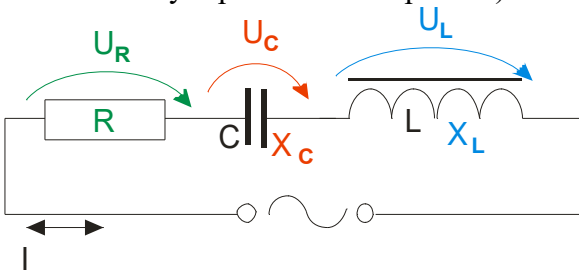
Nakreslíme si jednoduchý sériový RLC obvod (sériové zapojení odporu, cívky a kondenzátoru).



Tři součástky na obrázku, chceme spojit do jediné, která se z venku chová stejně.

⇒ Podobná situace jako při odvozování vzorce pro sériové zapojení rezistorů:

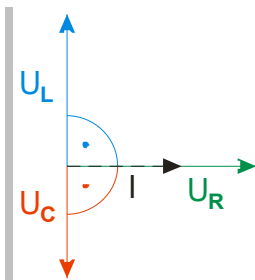
- všude stejný proud I ,
- na různých součástkách různá napětí U_R , U_L , U_C (liší se nejen velikostí, ale i fázovým posunem vůči proudu).



Jednotlivá napětí nemůžeme normálně sečíst (kvůli fázovému posunu) ⇒ sečteme je pomocí vektorů ⇒ nakreslíme obrázek.

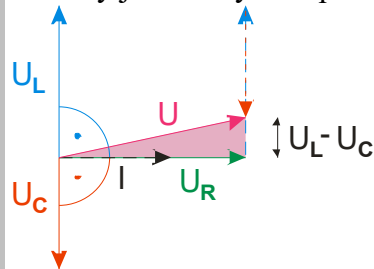


Př. 2: Dokresli do obrázku vektory napětí U_L , U_C . Předpokládej, že platí: $U_L > U_C$. Zakresli do obrázku vektor výsledného napětí. Podle obrázku sestav vzorec pro výpočet jeho velikosti.



Obě napětí budou vůči napětí U_R i proudu I posunuté: napětí U_L o 90° a napětí U_C o -90° .

Vektory jednotlivých napětí můžeme graficky snadno sečíst:



Velikost výsledného napětí můžeme určit z pravoúhlého růžového trojúhelníku.

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

Vztah pro výsledné napětí použijeme pro odvození celkové impedance.

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

$$(I \cdot Z)^2 = (I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L - I \cdot X_C)^2$$

$$I^2 \cdot Z^2 = I^2 \cdot R^2 + I^2 (X_L - X_C)^2$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \text{ , po dosazení: } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ .}$$

Ze stejného trojúhelníku můžeme určit i fázový posun.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I X_L - I X_C}{I R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Shrnutí: V sériovém RLC obvodu platí:

- impedance („celkový odpor“): $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ (na znaménku výrazu $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ nezáleží),
- fázový posun: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ (znaménko výrazu $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ nám určuje směr fázového posunu),
- Ohmův zákon: $I = \frac{U}{Z} \Rightarrow U_R = I \cdot R \text{ , } U_L = I \cdot X_L \text{ , } U_C = I \cdot X_C \text{ .}$

Př. 3: Ke zdroji střídavého napětí 5 V, 50 Hz, je připojen sériový obvod s odporem $2,0 \Omega$, s ideální cívkou $0,012 \text{ H}$ a kondenzátorem $46 \mu \text{ F}$. Urči indukanci cívky, kapacitanci kondenzátoru a celkovou impedanci obvodu. Urči proud, který obvodem protéká, fázový posun mezi napětím a proudem a napětí na jednotlivých součástkách.

Induktance cívky: $X_L = \omega L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,012 \Omega = 3,8 \Omega \text{ .}$

Kapacitance kondenzátoru: $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 46 \cdot 10^{-6}} \Omega = 69 \Omega \text{ .}$

Celková impedance: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{2,0 + (3,8 - 69)^2} \Omega = 65 \Omega \text{ .}$

Fázový posun: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{3,8 - 69}{2,0} = -32,6 \Rightarrow \varphi = -88^\circ 15' \text{ .}$

Proud: $I = \frac{U}{Z} = \frac{5}{65} \text{ A} = 0,077 \text{ A} \text{ .}$

Napětí odpor: $U_R = I \cdot R = 0,077 \cdot 2,0 \text{ V} = 0,15 \text{ V} \text{ .}$

Napětí cívka: $U_L = I \cdot X_L = 0,077 \cdot 3,8 \text{ V} = 0,29 \text{ V} \text{ .}$

Napětí kondenzátor: $U_C = I \cdot X_C = 0,077 \cdot 69 \text{ V} = 5,3 \text{ V} \text{ .}$

Z výsledků je vidět, že součet napětí na součástkách je opravdu větší než výsledné napětí, dokonce samotné napětí na kondenzátoru je vyšší než napětí zdroje.

Impedance kondenzátoru je daleko větší než impedance cívky \Rightarrow obvod se celkově chová jako kondenzátor (má záporný posun proudu a napětí).

Pedagogická poznámka: Předchozí obvod si zaslouží předvedení a změření proudu a napětí na součástkách, zejména předpověď hodnoty napětí na kondenzátoru je pro žáky těžko uvěřitelná.

Pedagogická poznámka: Následující úkoly zadávám ústně během řešení předchozího a následujícího příkladu, proto nejsou uvedeny jako příklad. Pokaždé, když žáci zformulují hypotézu, ihned ji ověřujeme pokusem.

Ke zdroji střídavého napětí 6 V, 50 Hz, je připojena žárovka 6 V, 300 mA. Jak se změní její svit, když do obvodu sériově připojíme kondenzátorem $46 \mu\text{F}$?

Odpor rozžhaveného vlákna žárovky je přibližně 20Ω , kapacitancí kondenzátoru je 69Ω
 \Rightarrow celková impedance obvodu 72Ω se zvětší přibližně 3,5 krát \Rightarrow žárovka bude svítit méně.

Jak se změní svit žárovky, když do obvodu se žárovkou a kondenzátorem připojíme sériově cívku s odporem $2,0 \Omega$ a indukčností $0,012 \text{H}$?

Induktance cívky je pouze $3,8 \Omega$ \Rightarrow celková impedance obvodu se nepatrně zmenší, ale efekt bude zřejmě tak malý, že to na svitu žárovky nebude znát.

Co se bude se svitem žárovky dít, když do cívky vložíme rovné jádro?

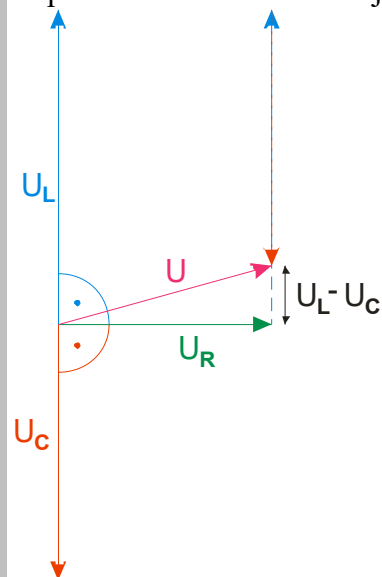
Železné jádro zvýší indukčnost (a tedy i induktanci) cívky více než desetkrát \Rightarrow celková impedance se bude během vkládání jádra zmenšovat (s tím, jak se čím dál větší část kapacity kondenzátoru bude kompenzovat s rostoucí induktancí cívky) \Rightarrow jas žárovky se bude zvětšovat (pokud bude při plném vložení jádra do cívky induktance větší než kapacitance dosáhne žárovka během vkládání největšího jasu a pak se její jas začne zase zmenšovat).

Jak se svit změní, když místo rovného jádra vložíme cívku na uzavřené U-jádro?

Vložení cívky na uzavřené U-jádro se indukce ještě více zvětší a v obvodu zcela převládne \Rightarrow jas žárovky se bude zmenšovat až zřejmě zcela pohasne.

Př. 4: Ke zdroji střídavého napětí je připojen sériový obvod s rezistorem, ideální cívku a kondenzátorem. Na jednotlivých součástkách byla naměřena napětí: $U_R = 5,6 \text{V}$, $U_L = 8,3 \text{V}$ a $U_C = 6,8 \text{V}$. Urči napětí napájecího zdroje a fázový posun mezi proudem na napětím.

Napětí na součástkách nemají stejný fázový posun \Rightarrow musíme je sčítat pomocí vektorů.



Z obrázku je zřejmé, že platí: $U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{5,6^2 + (8,3 - 6,8)^2} \text{ V} = 5,8 \text{ V}$$

$$\text{Fázový posun: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{8,3 - 6,8}{5,6} = 0,268 \Rightarrow \varphi = 15^\circ 00' .$$

Pedagogická poznámka: Cíl následujícího příkladu není fyzikální, jde o práci s kalkulátorem. Pro snadnější odhalování chyb při zadávání prvního výrazu uvádím několik postupných mezivýsledků (uvedené výrazy by opět měly být zadány najednou):

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 34,60 \quad , \quad 2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -27,06$$

$$2,0^2 + \left(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \right)^2 = 736,2$$

Př. 5: Urči pro obvod s příkladu 3 celkovou impedanci obvodu, fázový posun a proud, který prochází obvodem, pro další frekvence zdroje 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz a 500 Hz. Ze získaných hodnot sestav tabulku. Hodnoty se snaž počítat na kalkulačce najednou, při výpočtu hodnot pro různé frekvence využij funkci REPLAY (pokud ji kalkulátor obsahuje).

Jde o pouhé dosazování do vzorců z předchozího příkladu, měníme pouze hodnotu frekvence. Ukázkové dosazení pro 100 Hz.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{2,0^2 + \left(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 46 \cdot 10^{-6}} \right)^2} \Omega = 27,1 \Omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 0,012 - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 46 \cdot 10^{-6}}}{2,0} = -27,1 \Rightarrow \varphi = -87^\circ 53'$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{5}{27,1} \text{ A} = 0,18 \text{ A}$$

frekvence f	celková impedance Z	fázový posun φ	proud I
50 Hz	65,5	$-89^\circ 7'$	0,076
100 Hz	27,1	$-87^\circ 53'$	0,18
200 Hz	2,99	$-65^\circ 45'$	1,7
300 Hz	11,3	$84^\circ 51'$	0,44
500 Hz	30,8	$88^\circ 8'$	0,16

Pedagogická poznámka: Většina žáků samozřejmě nestihne spočítat celý příklad. Dopočítání nechávám jako úkol na doma s tím, že ho kontrolovat nebudu, ale výsledky budeme potřebovat.

Shrnutí: Při výpočtu celkové impedance sériového RLC obvodu postupujeme podobně jako při výpočtu celkového odporu sériově zapojených rezistorů. Sčítat jednotlivá napětí ale musíme pomocí vektorů.